Martin Erik HORN, Frankfurt/Main

Wie konstruieren wir eine sieben- oder neundimensionale Welt?

Mit den Worten “Basic Clifford algebra ... can be explained to the first person you meet in the street” unterstreicht Parra Serra (2009, S. 820) eindrücklich die Forderung, die Clifford Algebra als ein Alltagswerkzeug beim Lehren und Lernen von Mathematik und Physik zu verstehen. Er schlägt dabei vor, auf die Pauli-Algebra als Clifford-Algebra des dreidimensionalen Raumes auch schulisch schon frühzeitig konzeptionell hinzuarbeiten und die didaktische Gestaltung des Unterrichts so vorzunehmen, dass ein in höheren Klassenstufen dann erfolgender Einbezug nicht-kommutativer Algebren nicht verunmöglicht wird.

Zum geeigneten Zeitpunkt für die Einführung dieser Algebren schreibt er ausdrücklich: „I will not set lower limits.” (Parra Serra 2009, S. 824). Damit stellt sich die Frage der Anschlussfähigkeit dieses Ansatzes. Wie kann eine schulische Einführung mit den sich im Hochschulbereich ergebenden fachmathematischen und fachdidaktischen Erfordernissen konzeptuell verknüpft werden? Diese Frage soll im Folgenden unter Rückgriff auf das Zehfuss-Kronecker-Produkt aufgearbeitet werden.

Wie gelangen wir von einer drei- zu einer fünfdimensionale Welt?

Ausgangspunkt ist die konzeptionelle Beschreibung unserer dreidimensionalen, euklidischen Welt (in der wir vor Einstein lebten) mit Hilfe der Pauli-Algebra. In diesem Kontext stellen die drei Pauli-Matrizen σ_x, σ_y und σ_z nichts anderes als die Basis-Vektoren des dreidimensionalen Raumes (Cartan 1981, S. 43/44), (Hestenes 2003a), (Doran & Lasenby 2003), (Horn 2011a) dar.

Eine vier- oder fünfdimensionale Welt, also beispielsweise die vierdimensionale Raumzeit (in der wir seit Einstein leben), kann konzeptionell elegant durch die Dirac-Algebra beschrieben werden. In diesem Kontext stellen die vier Dirac-Matrizen γ_x, γ_y, γ_z und γ_t nichts anderes als die Basis-Vektoren der vierdimensionalen pseudoeuklidischen Raumzeit (vorbereitend in Cartan 1981, S. 125 ff), (Hestenes 2003b), (Doran & Lasenby 2003), (Horn 2009, 2010 & 2011a) bzw. die fünf Matrizen γ_x, γ_y, γ_z, γ_t und γ_v die Basis-Vektoren einer fünfdimensionalen Raumzeit der Signatur (–, –, –, +, +) (Horn 2011b) dar.

Zur Verknüpfung drei-, vier- und fünfdimensionaler Räume gibt es prinzipiell zwei Strategien: Zum einen kann die mathematische Welt im dreidimensionalen Fall übergroß gestaltet werden, so dass Pauli- und Dirac-Matrizen durch die Gleichungen

$$\sigma_i = \gamma_i \gamma_t \quad \text{mit} \quad i \in \{x, y, z\}$$

verknüpft werden, siehe (Hestenes 2003b, S. 695, Formel 43), (Gull et al. 1993, S. 1193, nach 5.2), (Doran & Lasenby 2003, S. 135, Formel 5.37).

Da Dirac-Matrizen γ_i nur als komplexe (4x4)-Matrizen, nicht jedoch als komplexe (2x2)-Matrizen darstellbar sind, sind alle Produkte zweier Dirac-Matrizen und die somit erzeugten Pauli-Matrizen in dieser Darstellung ebenfalls (4x4)-Matrizen.

Im Rahmen dieses Ansatzes arbeiten wir unbewusst in einer fünfdimensionalen Welt, wobei im dreidimensionalen Fall nur drei linear unabhängige und im vierdimensionalen Fall nur vier linear unabhängige (4x4)-Matrizen als Basis-Vektoren herangezogen werden. Die zwar mathematisch vorhandenen, aber faktisch nicht benötigten restlichen Basis-Vektoren werden dabei einfach „vergessen".

Da diese Konstruktion jedoch auf konventionellen Matrizenmultiplikationen beruht, die nur immer wieder zu (4x4)-Matrizen führen, sind damit maximal $2^5 = 32$ unterschiedliche Basiselemente zugänglich. Dadurch lassen sich höchstens fünfdimensionale Räume bzw. fünfdimensionale Raumzeiten beliebiger Signatur beschreiben. Wir müssen uns also etwas Neues einfallen lassen, um zu höherdimensionalen Räumen zu gelangen.

Kapern wir die Mathematik des Quanten-Computings!

Eine zweite Strategie zur Verknüpfung drei-, vier- , fünf- und höherdimensionaler Welten ist in der Physik aus dem Bereich der Quantenalgebra bekannt, wobei die Gesetze der Quantenmechanik zur Simulation gedachter bzw. Konstruktion tatsächlicher Quantencomputer herangezogen werden:

„Für unsere Zwecke ist das Tensorprodukt einfach und anschaulich zu handhaben. Aus den Räumen für zwei Quantenbits $|x\rangle$ und $|y\rangle$ mit Basen $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ erhalten wir durch das Tensorprodukt einen Raum für das Register aus diesen beiden Bits" (Homeister 2008, S. 39). Die hier als Tensorprodukt bezeichnete multiplikative Verknüpfung zweier Matrizen ist jedoch weit älter als die Quantenmechanik und wurde erstmals von Johann Georg Zehfuss in (Zehfuss 1858), (Muir 1960, Vol. 2, S. 102) und dann später erneut von Kronecker (Henderson et al. 1983) beschrieben. Die fünf Basis-Vektoren der Dirac-Algebra lassen dabei sich mit Hilfe von

$$\gamma_i = (\sigma_x \sigma_z) \otimes \sigma_i \qquad \gamma_t = \sigma_z \otimes E_2 \qquad \gamma_v = \sigma_x \otimes E_2$$

mit $i \in \{x, y, z\}$ und der (2x2)-Einheitsmatrix E_2 in Anlehnung an (Steeb

1991, S. 71 ff), (Gröbner 1966, S. 246 ff) konstruieren. In gänzlich analoger Weise bauen sich die Basis-Vektoren κ_i höherdimensionaler Räume auf. Die Basis-Vektoren einer siebendimensionalen Raumzeit der Signatur (+, +, +, –, –, +, +) ergeben sich beispielsweise durch

$$\kappa_{j(7\text{-dim})} = (\sigma_x \, \sigma_z) \otimes \gamma_i \qquad \kappa_{6(7\text{-dim})} = \gamma_t \otimes E_2 \qquad \kappa_{7(7\text{-dim})} = \gamma_v \otimes E_2$$

wobei der Einfachheit halber die physikalisch motivierten Indexbezeichnungen $i \in \{x, y, z, t, v\}$ mit Hilfe von $j = 1, 2, ..., 5$ durchnummeriert wurden.

Höherdimensionale Räume und Signaturänderungen

Die rekursiv aus den Basis-Vektoren der siebendimensionalen Raumzeit konstruierten Basis-Vektoren einer neundimensionalen Raumzeit

$$\kappa_{j(9\text{-dim})} = (\sigma_x \, \sigma_z) \otimes \kappa_{j(7\text{-dim})} \quad \text{mit} \quad j = 1, 2, ..., 7$$

$$\kappa_{8(9\text{-dim})} = \kappa_{6(7\text{-dim})} \otimes E_2 \quad \text{und} \quad \kappa_{9(9\text{-dim})} = \kappa_{7(7\text{-dim})} \otimes E_2$$

weisen durch die bei dieser Konstruktion erfolgenden Vorzeichenumkehr eine Signatur von (–, –, –, +, +, –, –, +, +) auf. Auch im höherdimensionalen Fall (mit n ungerade) werden bei der Konstruktion mit Hilfe von

$$\kappa_{j(n\text{-dim})} = (\sigma_x \, \sigma_z) \otimes \kappa_{j(n-2\text{-dim})} \quad \text{mit} \quad j = 1, 2, ..., n-2$$

$$\kappa_{n-1(n\text{-dim})} = \kappa_{n-3(n-2\text{-dim})} \otimes E_2 \quad \text{und} \quad \kappa_{n(n\text{-dim})} = \kappa_{n-2(n-2\text{-dim})} \otimes E_2$$

die Signaturen immer eine paarweise alternierende, vorzeichengemischte Struktur aufweisen. Dies lässt sich jedoch aufgrund der Antikommutativität zweier verschiedener Basis-Vektoren ändern, wenn Basis-Vektoren κ_i durch ihre Duale $\pm\, i\, \kappa_i$ ersetzt werden, so dass das Quadrieren zu einem entgegengesetzten Vorzeichen führt.

Didaktische Einordnung

Die Geometrische Algebra ist auch heute noch, mehr als 150 Jahre nach den ersten Formulierungsansätzen von Graßmann und Clifford, umstritten und wird hinsichtlich ihrer didaktischen Rolle höchst unterschiedlich bewertet. Während beispielsweise Befürworter die strukturelle Gleichwertigkeit von Operatoren und Operanden als entscheidenden fachlichen und didaktischen Vorteil ansehen, verwerfen Skeptiker diesen Sachverhalt als konzeptionell nachteilig.

Auch die Verknüpfung algebraischer und geometrischer Interpretationen wird kontrovers diskutiert. Emotionale Kontroversen gibt es insbesondere über die Frage, ob sich mit Hilfe der Geometrischen Algebra die Struktur des uns umgebenden physikalischen Raumes besser abbilden lässt als mit

Hilfe der konventionellen linearen Algebra. Doch egal, welchen Standpunkt man einnimmt: Die Konstruktion höherdimensionaler Räume mit Hilfe des Zehfuss-Kronecker-Produkts ist elementarer Bestandteil der Quantenalgebra. Sollte es als Aufgabe der Mathematikdidaktik angesehen werden, einen didaktisch tragfähigen Weg zur Mathematik des Quanten-Computings zu eröffnen, dann ist eine didaktische Aufarbeitung des Zehfuss-Kronecker-Produkts und dessen Verallgemeinerung als Tensorprodukt unabdingbar.

Literatur

Cartan, É. (1981): The Theory of Spinors. Unabridged Republication of the Complete English Translation. New York: Dover Publications.

Doran, Ch. & Lasenby, A. (2003): Geometric Algebra for Physicists. Cambridge: CUP.

Gull, S., Lasenby, A. & Doran, C. (1993). Imaginary Numbers are not Real – The Geometric Algebra of Spacetime. Foundations of Physics, Vol. 23, No. 9, S. 1175 - 1196.

Gröbner, W. (1966): Matrizenrechnung. Mannheim: Bibliographisches Institut.

Henderson, H. V., Pukelsheim, F. & Searle, S. R. (1983): On the History of the Kronecker Product. Linear and Multilinear Algebra, Vol. 14, No. 2, S. 113 - 120.

Hestenes, D. (2003a): Reforming the Mathematical Language of Physics. Oersted Medal Lecture. In: American Journal of Physics, Vol. 71, No. 2, S. 104 - 121.

Hestenes, D. (2003b): Spacetime Physics with Geometric Algebra. In. American Journal of Physics, Vol. 71, No. 7, S. 691 - 714.

Homeister, M. (2008): Quantum Computing verstehen. Grundlagen – Anwendungen – Perspektiven. 2. Auflage. Wiesbaden: Friedrich Vieweg & Sohn/GWV-Fachverlage.

Horn, M. E. (2009): Vom Raum zur Raumzeit. In D. Höttecke (Hrsg.): Chemie- und Physikdidaktik für die Lehramtsausbildung. GDCP-Band 29. Berlin: LIT-Verlag Dr. W. Hopf, S. 455 - 457.

Horn, M. E. (2010): Die Spezielle Relativitätstheorie in der Mathematikerausbildung. PhyDid B – Didaktik der Physik, Beiträge zur DPG-Frühjahrstagung des Fachverbands Didaktik der Physik in Hannover 2010. Beitrag 19.35.

Horn, M. E. (2011a): Grassmann, Pauli, Dirac – Special Relativity in the Schoolroom. In: H.-J. Petsche, A. C. Lewis, J. Liesen, S. Russ (Hrsg.): From Past to Future – Graßmann's Work in Context. Basel, Berlin: Birkhäuser, S. 435 - 450.

Horn, M. E. (2011b): Die fünfdimensionale Welt der Kosmologischen Relativität. In: D. Höttecke (Hrsg.): Beiträge zur Jahrestagung der GDCP in Potsdam, Band 31. Berlin: LIT-Verlag Dr. W. Hopf, S. 158 - 160.

Muir, Th. (1960): The Theory of Determinants in the Historical Order of Development. Unabridged and Unaltered Republication. New York: Dover Publications.

Parra Serra, J. M. (2009): Clifford Algebra and the Didactics of Mathematics. Advances in Applied Clifford Algebras, Vol. 19, No. 19, S. 819 - 834.

Steeb, W.-H. (1991): Kronecker Product of Matrices and Applications. Mannheim: Bibliographisches Institut/Wissenschaftsverlag.

Zehfuss, G. J. (1858): Über eine gewisse Determinante. Zeitschrift für Mathematik und Physik, Vol. 3, S. 298 - 301.